Cours fondamental 1 (M2 LMFI)
"Théorie des modèles et théorie des ensembles"
automne 2013

FEUILLE D'EXERCICES 4

Exercice 1.

(1) Soit $L_s = \{s(x)\}$ où $s(x)$ est une fonction unaire. Nous considerons la L-structure $M = (\mathbb{Z}, x \mapsto x+1)$.
  (a) Soit T_s telle que s est une bijection et s ne contient pas de cycles. Observer que M est une modèle de T_s.
  (b) Montrer que T_s n'est pas $\aleph_0$-catégorique, mais qu'elle est catégorique en tout cardinal non dénombrable.
  (c) Montrer que T_s est complète et qu'elle a l'élimination des quanteurs.

(2) Soit $L_< = \{<\}$. Nous considerons la L-structure $M = (\mathbb{Z}, <)$.
  (a) Soit $L_<$-théorie T_{ord} la théorie des ordres discrets sans extrémités. Montrer que T_{ord} n'a pas l'élimination des quanteurs.
  (b) On considère le langage $L'_< = L_< \cup \{d_n(x,y) : n \in \mathbb{N}\}$ où les $d_n(x,y)$ sont des relations binaires et la théorie

$$T'_< = T_< \cup \{\forall x \forall y\, (d_n(x,y) \leftrightarrow \exists z_0 \ldots \exists z_n\, (x < z_0 < \ldots < z_n < y))\}.$$

  Montrer que chaque modèle de T_s admet une extension en un modèle de $T_<$ (ou $T'_<$) et que $T'_<$ n'est catégorique en aucun cardinal.
  (c) Montrer que $T'_<$ est une théorie complète et que $T'_<$ a l'élimination des quanteurs (par la méthode de va-et-vient).

Exercice 2 ($\mathbb{Z}$-groupes). Soit $L = \{0, 1, +, -\} \cup \{P_n, n \geq 2\}$, où les P_n sont des prédicats unaires. On associe aux entiers relatifs la L-structure $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, (n\,\mathbb{Z})_{n\geq 2})$. Le but de cet exercice est de comprendre $\mathrm{Th}(\mathcal{Z})$.

On considère la L-théorie T axiomatisée par les axiomes suivants:

- des axiomes de groupes abéliens sans torsion, avec 0 l'identité;
- pour tout $n \geq 2$ l'énoncé $\forall x (P_n(x) \leftrightarrow \exists z\, nz = x)$;
- pour tout $n \geq 2$ l'énoncé $\neg P_n(1)$;
- pour tout $n \geq 2$ l'énoncé $\forall x \left(\bigvee_{d=0}^{n-1} P_n(x-d) \right)$, où $d = 1 + \cdots + 1$ (d fois).

(1) Soit $M \models T$. Observer que pour $n \geq 2$, $1 \mapsto 1_M$ induit un isomorphisme $\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z} \cong M/nM$.

(2) Observer: $\mathcal{Z}$ est modèle de T et admet un (unique) plongement dans tout modèle de T.

(3) Pour $i = 1, 2$, soient $M_i \models T$, $U_i \subseteq M_i$ des sous-structures et $f : U_1 \cong U_2$ un L-isomorphisme.
Montrer que f s'étend en un isomorphisme $\tilde{f} : \mathrm{Div}_{M_1}(U_1) \cong \mathrm{Div}_{M_2}(U_2)$, où $\mathrm{Div}_M(U) := \{b \in M \mid \exists n \geq 2 \text{ tel que } nb \in U\}$ est la clôture divisible de U dans M.

(4) Soit $M \models T$ et $a \in M$. Pour $n \geq 2$, on note $d_n(a)$ l'unique $d_n \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $M \models P_n(a - d_n)$. Observer que la suite $(d_n(a))_{n\geq 2}$ satisfait à la condition suivante:
  $(*)$: Si $m \mid n$, alors $m \mid (d_n(a) - d_m(a))$.

Réciproquement, on suppose donnée une suite d'entiers $(d_n)_{n\geq 2}$ avec $d_n \in \{0, \ldots, n-1\}$ et vérifiant $(*)$. Soit $N \models T$ un modèle ω-saturé et $B = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle \subseteq N$ une sous-structure finiment engendrée. Montrer qu'il existe $a \in N$, $a \notin \mathrm{Div}_N(B)$, tel que $(d_n(a))_{n\geq 2} = (d_n)_{n\geq 2}$.

(5) Montrer que T élimine les quanteurs et est une théorie complète.

(6) Soit $L' = \{0, 1, +, -\}$. Montrer que T n'élimine pas les quanteurs dans L'. (Indication: on peut trouver $G \subseteq H$ deux modèles de T et $a \in G$ tels que $H \models 2|a$ et $G \models \neg(2|a)$.)

(7) Montrer que dans $(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1)$ on ne peut pas definir l'ordre habituel dans $\mathbb{Z}$. (Indication: trouver un isomorphisme convenable.)

Artem Chernikov
chernikov@math.jussieu.fr
chernikov.me